第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1039-11

一类高阶中立型微分方程周期解的存在性*

郑春华[1]， 刘文斌[2]

(1- 陕西工业职业技术学院基础部，咸阳 712000； 2- 中国矿业大学数学系，徐州 221116)

摘 要: 本文研究一类高阶中立型泛函微分方程周期解的存在性，利用一些分析技巧和 k-集压缩映射理论得到了该类方程至少存在一个周期解的两类充分条件。所得结果将现有关于常微分方程的结论推广到了泛函微分方程情形，同时减少或减弱了已有结果中的一些条件，从方程的形式和周期解的存在性条件两个方面推广和改进了文献中的相应工作。

关键词: 中立型微分方程；高阶；k-集压缩映射；周期解

分类号: **AMS**(2000) 34K40; 34K13 **中图分类号**: O175.6 **文献标识码**: A

1 引言

中立型微分方程作为泛函微分方程的一种重要类型，与实际问题联系紧密，如无损传输线连接问题中就涉及到中立型微分方程[1]

$$u'(t)-ku'\Big(t-\frac{2}{S}\Big)=f\Big(u(t),u\Big(t-\frac{2}{S}\Big)\Big),$$

其中 $S=\sqrt{LC}$，因此中立型微分方程的研究具有重要的意义，已经引起了大量专家学者的广泛重视，出现了很多新结果，如文献 [2-6]，但主要是关于低阶方程的结果。对于高阶中立型微分方程的周期边值问题，相关的研究结果还不是很多，文献 [7] 利用级数理论研究了中立型微分方程

$$x^{(m)}(t)+b_0x^{(m)}(t-h_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\big[a_ix^{(m-i)}(t)+b_ix^{(m-i)}(t-h_i)\big]=f(t)$$

周期解的存在性。

文 [8] 在

(H_1) 方程

$$x^{(m)}+a_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+a_1x'=0$$

具有唯一的周期解且为常数；

(H_2) 存在常数 $k\in[0,1)$ 满足

$$\big|g(t,x,x_1,\cdots,x_{m-1},p)-g(t,x,x_1,\cdots,x_{m-1},q)\big|\le k|p-q|,$$

$$\forall\,(t,x,x_1,\cdots,x_{m-1},p),\ (t,x,x_1,\cdots,x_{m-1},q)\in R\times R^{m+1};$$

收稿日期: 2008-04-28. **作者简介**: 郑春华 (1982年8月生)，男，硕士. 研究方向：微分方程边值问题.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10771212).

(H_3) 存在常数 $p_0, p_1, \cdots, p_m, p$ 满足

$$\big|g(t,x,x_1,\cdots,x_m)\big| \le g(t,x,x_1,\cdots,x_m) + p_0|x| + \cdots + p_m|x_m| + p,$$

$$\forall\,(t,x,x_1,\cdots,x_m) \in R \times R^{m+1}$$

等条件下研究了常微分方程

$$x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + a_1x' + g\big(t,x,x',\cdots,x^{(m)}\big) = f(t) \tag{1}$$

周期解的存在性，其中 $f(t)$ 为连续的T-周期函数，$a_i\ (i=1,\cdots,m-1)$ 为常数。

本文考虑一类高阶中立型微分方程

$$x^{(m)} = \sum_{i=1}^{m-1} a_i x^{(i)} + g\big(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x(t-\tau_{0m_0}(t)),\cdots,$$

$$x^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big) \tag{2}$$

周期解的存在性，其中 $g \in C(R\times R\times R^{m_0+\cdots+m_m}, R)$ 且关于 t 是 T-周期的，$\tau_{ij}\ (i=0,1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,m_i)$ 为连续的T-周期函数。我们得到了下面的结果。

定理1 若下列条件满足

(A_1) 存在常数 $d>0$，满足

$$xg(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) > 0 \quad 或 \quad xg(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) < 0,$$

$$|x| > d, \quad (t,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) \in [0,T] \times R^{m_0+\cdots+m_m};$$

(A_2) 存在连续函数 $\beta(t)$, $b_{ij}(t)\ (i=0,1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,m_i)$ 满足

$$\big|g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) - g(t,y,y_{01},\cdots,y_{mm_m})\big| \le \beta(t)|x-y| + \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{m_k} b_{ki}(t)|x_{ki}-y_{ki}|,$$

$$(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}),\ (t,y,y_{01},\cdots,y_{mm_m}) \in R\times R\times R^{m_0+\cdots+m_m};$$

(A_3) $\tau_{mj}(t)\ (j=1,\cdots,m_m)$ 具有连续的导数，$|\tau'_{mj}|_0 < 1$，且

$$\Big(|\beta|_0 + \sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0\Big)T^m + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(|a_k| + \sum_{i=k}^{m_k}|b_{ki}|_0\Big)T^{m-k} + \sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\Big|\frac{1}{1-\tau'_{mi}}\Big|_0 < 1,$$

则方程(2)至少存在一个T-周期解，其中 $|\cdot|_0$ 表示最大值范数。

定理2 假设定理1中的条件 (A_1) 及下面的条件得到满足：

(B_1) 存在连续函数 $\alpha_i(t)\ (i=1,\cdots,m_m)$ 满足 $\sum_{i=1}^{m_m}|\alpha_i|_0 < 1$，且

$$\big|g(t,x,x_{01},\cdots,x_{m-1m_{m-1}},z_{m1},\cdots,z_{mm_m})$$

$$-\, g(t,x,x_{01},\cdots,x_{m-1m_{m-1}},y_{m1},\cdots,y_{mm_m})\big| \le \sum_{i=1}^{m_m}\alpha_i(t)|z_{mi}-y_{mi}|,$$

$$(t,x,x_{01},\cdots,x_{m-1m_{m-1}},z_{m1},\cdots,z_{mm_m}) \in R\times R\times R^{m_0+\cdots+m_m},$$

$$(t,x,x_{01},\cdots,x_{m-1m_{m-1}},y_{m1},\cdots,y_{mm_m}) \in R\times R\times R^{m_0+\cdots+m_m};$$

(B_2) 存在连续函数 $c(t)$, $c_{ij}(t)$ $(i=0,1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,m_i)$ 使得

$$\left|g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m})\right| \le g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) + c(t)|x| + \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ki}(t)|x_{ki}|,$$

$$(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}) \in R\times R\times R^{m_0+\cdots+m_m};$$

(B_3) $\tau_{mj}(t)$ $(j=1,\cdots,m_m)$ 具有连续的导数，$|\tau'_{mj}|_0<1$，且

$$\Big(|c|_0+\sum_{i=1}^{m_0}|c_{0i}|_0\Big)T^m+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(|a_k|+\sum_{i=k}^{m_k}|c_{ki}|_0\Big)T^{m-k}+\sum_{i=1}^{m_m}|c_{mi}|_0\Big|\frac{1}{1-\tau'_{mi}}\Big|_0<1,$$

则方程 (2) 至少存在一个 T-周期解。

注 若定理 1 和定理 2 中条件 (A_1) 变为

(A'_1) 存在常数 c_1, c_2 及函数 μ_-, $\mu_+ : R\to R\bigcup\{+\infty,-\infty\}$，满足

$$g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m})\ge c_1,\quad \forall\, x\ge 0,\quad (t,x_{01},\cdots,x_{mm_m})\in R\times R^{m_0+\cdots+m_m},$$

$$g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m})\le c_2,\quad \forall\, x\le 0,\quad (t,x_{01},\cdots,x_{mm_m})\in R\times R^{m_0+\cdots+m_m},$$

$$\int_0^T \mu_-(t)\mathrm{d}t<0<\int_0^T \mu_+(t)\mathrm{d}t,$$

且

$$\mu_-(t)\ge \lim_{x\to-\infty}\sup g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}),\quad t\in R,$$

$$\mu_+(t)\le \lim_{x\to+\infty}\inf g(t,x,x_{01},\cdots,x_{mm_m}),\quad t\in R,$$

对 $(x_{01},\cdots,x_{mm_m})\in R^{m_0+\cdots+m_m}$ 一致成立。

则定理 1 和定理 2 的结论仍然成立。

从方程形式上看，文 [7] 讨论的方程是我们研究的方程的特殊情形，方程 (1) 为一般常微分方程，方程 (2) 为中立型泛函微分方程，研究难度大，具有更重要的意义。

从定理条件上看，条件 (A_1) 比文 [8] 中相应的条件更简单，便于实际验证。在定理 2 中我们没有要求文 [8] 中的条件 (H_1) 成立，同时定理 2 中的条件 (B_1) 和 (B_2) 要比文 [8] 中相应的条件 (H_2) 和 (H_3) 要弱，因此，定理 1 和定理 2 推广和改进了文献 [7] 和文献 [8] 中相应的结果。

2 主要引理

定义 1[9] 设 E 是一个 Banach 空间，$A\subset E$ 是一个有界开集，称

$$\alpha_E(A)=\inf\Big\{\delta>0 \mid \text{存在有限个集合 } A_i\subset A \text{ 满足 } A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\ \mathrm{diam}(A_i)<\delta\Big\}$$

为 A 的非紧性测度，其中 $\mathrm{diam}(A_i)$ 表示集合 A_i 的直径。

定义 2[9] 设 X, Y 都是 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 为一个有界开集，$N:\bar{\Omega}\to Y$ 为一个连续有界的映射，如果存在常数 k 使得对任何有界集 $A\subset\Omega$ 都有

$$\alpha_Y(N(A))\le k\alpha_X(A),$$

则称 N 是 $\bar{\Omega}$ 上的 k-集压缩映射。

设 L 是一个 $X \to Y$ 的零指标 Fredholm 算子，定义

$$l(L) = \sup\{r \geq 0 \mid r\alpha_X(A) \leq \alpha_Y(L(A)),\ \text{对任意的有界集}\ A \subset X\}.$$

引理 1[9]　设 $L: X \to Y$ 是一个零指标的 Fredholm 算子，$y \in Y$ 是一个固定点，$N: \bar{\Omega} \to Y$ 为一个 k-集压缩映射，且 $k \leq l(L)$，其中 $\Omega \subset X$ 为一个关于 $0 \in \Omega$ 对称的有界开集，并假设条件

(A)　$Lx \neq \lambda Nx + \lambda y,\ \forall\, x \in \partial\Omega,\ \lambda \in (0,1)$；

(B)　$\langle QNx + Qy, x\rangle \cdot \langle QN(-x) + Qy, x\rangle < 0, x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$

成立，则 $Lx - Nx = y$ 在 $\bar{\Omega}$ 中至少存在一个 T-周期解，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $X \times Y$ 上的双线性形式，Q 是 Y 到 $\mathrm{Coker}L$ 上的投影算子。

为了利用引理 1 研究方程 (2) 周期解的存在性，我们定义

$$C_T^k = \{x \in C^k(R,R) \mid x(t+T) = x(t),\ t \in R\}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

并在 C_T^0 和 C_T^k $(k = 1, \cdots, m)$ 上分别定义范数

$$|\varphi|_0 = \max_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|, \quad \forall\, \varphi \in C_T^0; \qquad |\varphi|_k = \max_{0\leq i\leq k}|\varphi^{(i)}|_0, \quad \forall\, \varphi \in C_T^k,$$

则 C_T^k 在相应的范数下成为 Banach 空间。令 $X = C_T^m$，$Y = C_T^0$ 并定义

$$L: X \to Y, \quad Lx = x^{(m)},$$

$$N: X \to Y, \quad Nx = \sum_{i=1}^{m-1} a_i x^i + g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x(t-\tau_{0m_0}(t)), \cdots,$$

$$x^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big).$$

引理 2　算子 L 是一个零指标的 Fredholm 算子，并且 $l(L) \geq 1$。

证明　显然，

$$\mathrm{Ker}L = R, \quad \mathrm{Im}L = \Big\{y \in Y \mid \int_0^T y(t)\mathrm{d}t = 0\Big\},$$

故 L 是一个零指标的 Fredholm 算子。设 $A \subset X$ 为有界集，令 $\eta = \alpha_Y L(A) \geq 0$，对任意的 $\varepsilon \geq 0$，由定义 1 可知，存在有限个集合 B_i $(i = 1, \cdots, n)$，使得

$$L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad \text{且} \quad \mathrm{diam}_Y(B_i) \leq \eta + \varepsilon.$$

记 $A_i = \{x \mid x \in A,\ Lx \in B_i\}$，易知，

$$\mathrm{diam}_Y(L(A_i)) \leq \eta + \varepsilon, \quad \text{且} \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

再由 C_T^m 紧嵌入 C_T^{m-1} 和 C_T^{m-1} 为 Banach 空间可以得到，A_i 嵌入 C_T^{m-1} 后为完全有界集，故存在集合 $A_{ij} \subset A_i$ $(j = 1, \cdots, n_i)$ 使得

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \quad \text{且} \quad \mathrm{diam}_{C_T^{m-1}}(A_{ij}) < \varepsilon,$$

故 $\mathrm{diam}_X(A_{ij}) < \eta + \varepsilon$。显然，

$$A = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij},$$

由 ε 的任意性知，$\alpha_X(A) \le \eta = \alpha_Y(L(A))$，即 $l(L) \ge 1$。

引理3　令

$$k = \sum_{i=1}^{m_m} |b_{mi}|_0,$$

则 $N : X \to Y$ 是一个 k-集压缩映射。

证明　设 A 是 X 的一个有界子集，令 $\eta = \alpha_X(A)$，则存在 A_i $(i = 1, \cdots, n)$ 使得

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad 且 \quad \mathrm{diam}_X(A_i) \le \eta + \varepsilon.$$

易知，g 在 $R \times R \times R^{m_0+m_1+\cdots+m_m}$ 的紧子集上一致连续，A_i 在 C_T^{m-1} 中相对紧，故存在 $A_{ij} \in A_i$ $(j = 1, \cdots, n_i)$ 使得

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \quad \mathrm{diam}_{C_T^{m-1}}(A_{ij}) < \varepsilon,$$

且

$$\begin{aligned}&\big|g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)), u^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)), \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\quad - g\big(t, u, u(t-\tau_{01}(t)), \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\big| \le \varepsilon, \quad \forall\, x, u \in A_{ij},\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}|Nx - Nu|_0 &= \sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{i=1}^{m-1} a_i x^{(i)} + g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\qquad - \sum_{i=1}^{m-1} a_i u^{(i)} - g\big(t, u, u(t-\tau_{01}(t)), \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\Big|\\ &= \sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{i=1}^{m-1} a_i(x^{(i)} - u^{(i)}) + g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\qquad - g\big(t, u, u(t-\tau_{01}(t)), \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\Big|\\ &\le \sum_{i=1}^{m-1} |a_i|\varepsilon + \sup_{t\in[0,T]}\big|g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\qquad - g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)), u^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\\ &\qquad \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\qquad + g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)), u^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\\ &\qquad \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\ &\qquad - g\big(t, u, u(t-\tau_{01}(t)), \cdots, u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\big|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{m-1}|a_i|\varepsilon+\sup_{t\in[0,T]}\Big|g\big(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\
&\quad -g\big(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),u^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\\
&\quad \cdots,u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\Big|\\
&\quad +\sup_{t\in[0,T]}\Big|g\big(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),u^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\\
&\quad \cdots,u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\\
&\quad -g\big(t,u,u(t-\tau_{01}(t)),\cdots,u^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\Big|\\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{m-1}|a_i|+1\Big)\varepsilon+\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\big|x^{(m)}-u^{(m)}\big|_0\\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{m-1}|a_i|+1\Big)\varepsilon+\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0(\eta+\varepsilon),
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性可得

$$
\alpha_Y(N(A))\le\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\eta=k\alpha_X(A).
$$

引理 4[10] 如果 $g\in C_T$，$\tau\in C_T^1$ 且 $\tau'(t)<1$，$\forall\, t\in[0,T]$。则 $g(\mu(t))\in C_T$，其中 $\mu(t)$ 是 $t-\tau(t)$ 的反函数。

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 考虑辅助方程

$$
\begin{aligned}
x^{(m)} \;=\; &\lambda\sum_{i=1}^{m-1}a_ix^{(i)}+\lambda g\big(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x(t-\tau_{0m_0}(t)),\cdots,\\
&x^{(m)}(t-\tau_{m1}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big),\quad \lambda\in(0,1),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

显然方程 (3) 在周期边界条件下等价于算子方程 $Lx=\lambda Nx$。

为了利用引理 1，我们首先证明方程 (3) 的周期解有先验界。

第一步，证明对方程 (3) 的任一周期解 $x(t)$，都存在 $t_0\in[0,T]$ 满足 $|x(t_0)|\le d$。

在方程 $Lx=\lambda Nx$ 两边对 t 从 0 到 T 积分有

$$
\int_0^T Nx(t)\mathrm{d}t=0,
$$

即

$$
\int_0^T g\big(t,x(t),x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\mathrm{d}t=0.
$$

若对于任意的 $t\in[0,T]$，都有 $|x(t)|>d$，由条件 (A_1) 可知上式不可能成立，故对方程 (3) 的任一周期解 $x(t)$，都存在 $t_0\in[0,T]$ 满足 $|x(t_0)|\le d$。

第二步，我们证明存在常数 M 为方程 (3) 周期解的先验界。

由方程 (3) 和条件 (A_2) 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t &= \lambda \int_0^T \Big|\sum_{i=1}^{m-1} a_i x^{(i)} + \lambda g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\Big|\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^T |x^{(i)}(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T \big|g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big)\big|\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^T |x^{(i)}(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T \big|g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big) \\
&\quad -g(t,0,\cdots,0) + g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^T |x^{(i)}(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T \big|g\big(t, x, x(t-\tau_{01}(t)), \cdots, x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t))\big) \\
&\quad -g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t + \int_0^T \big|g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| T |x^{(i)}|_0 + \int_0^T |\beta(t)x(t)|\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m_0} \int_0^T |b_{0i}(t)x(t-\tau_{0i}(t))|\mathrm{d}t + \cdots \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_m} \int_0^T |b_{mi}(t)x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))|\mathrm{d}t + \int_0^T |g(t,0,\cdots,0)|\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| T |x^{(i)}|_0 + |\beta|_0 T |x|_0 + \sum_{i=1}^{m_0} |b_{0i}|_0 T |x|_0 + \cdots + \sum_{i=1}^{m_{m-1}} |b_{m-1i}|_0 T |x^{(m-1)}|_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_m} |b_{mi}|_0 \int_0^T |x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))|\mathrm{d}t + \int_0^T |g(t,0,\cdots,0)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由 $x(0)=x(T),\cdots,x^{(m-1)}(0)=x^{(m-1)}(T)$ 知存在 ξ_i $(i=1,\cdots,m)$，使得 $x^{(i)}(\xi_i)=0$，不难得到

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(t)\mathrm{d}t,$$

$$x^{(i)}(t) = x^{(i)}(\xi_i) + \int_{\xi_i}^t x^{(i+1)}(t)\mathrm{d}t, \quad i=1,\cdots,m-1,$$

注意到 $|x(t_0)| \le d$，可得

$$|x|_0 \le d + T|x'|_0 \le \cdots \le d + T^{m-1}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,$$

$$|x'|_0 \le T^{m-2}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,$$

$$\vdots$$

$$|x^{(m-1)}|_0 \le \int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t \le\ & \Big(|\beta|_0 T+\sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0 T\Big)\Big(d+T^{m-1}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\Big)\\ &+\Big(|a_1|+\sum_{i=1}^{m_1}|b_{1i}|_0\Big)T^{m-1}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t+\cdots\\ &+\Big(|a_{m-1}|+\sum_{i=1}^{m_{m-1}}|b_{m-1i}|_0\Big)T\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\\ &+\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\int_0^T \big|x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))\big|\mathrm{d}t+\int_0^T \big|g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t\\ =\ & \Big[\Big(|\beta|_0+\sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0\Big)T^m+\Big(|a_1|+\sum_{i=1}^{m_1}|b_{1i}|_0\Big)T^{m-1}+\cdots\\ &+\Big(|a_{m-1}|+\sum_{i=1}^{m_{m-1}}|b_{m-1i}|_0\Big)T\Big]\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\\ &+\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\int_0^T \big|x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))\big|\mathrm{d}t\\ &+\int_0^T \big|g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t+\Big(|\beta|_0 T+\sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0 T\Big)d,\end{aligned}$$

由定理1条件及引理4可得

$$\int_0^T \big|x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))\big|\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{|x^{(m)}(s)|}{1-\tau'_{mi}(\mu_i(s))}\mathrm{d}s\le\Big|\frac{1}{1-\tau'_{mi}}\Big|_0\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t \le\ & \Big[\Big(|\beta|_0+\sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0\Big)T^m+\Big(|a_1|+\sum_{i=1}^{m_1}|b_{1i}|_0\Big)T^{m-1}+\cdots\\ &+\Big(|a_{m-1}|+\sum_{i=1}^{m_{m-1}}|b_{m-1i}|_0\Big)T+\sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\Big|\frac{1}{1-\tau'_{mi}}\Big|_0\Big]\int_0^T |x^{(m)}|\mathrm{d}t\\ &+\int_0^T \big|g(t,0,\cdots,0)\big|\mathrm{d}t+\Big(|\beta|_0 T+\sum_{i=1}^{m_0}|b_{0i}|_0 T\Big)d,\end{aligned}$$

由条件 (A_3) 知存在常数 M'_m 满足

$$\int_0^T |x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\le M'_m,$$

进而，存在常数 M_i $(i=0,1,\cdots,m-1)$ 使得 $|x^{(i)}|_0\le M_i$。再由方程 (3) 可得

$$
\begin{aligned}
|x^{(m)}|_0 \le& \sum_{i=1}^{m-1}|a_i||x^{(i)}|_0+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t)))\right|\\
\le& \sum_{i=1}^{m-1}|a_i||x^{(i)}|_0+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t)))\right.\\
&-g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0)\\
&\left.+g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0)\right|\\
\le& \sum_{i=1}^{m-1}|a_i||x^{(i)}|_0+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m)}(t-\tau_{mm_m}(t)))\right.\\
&\left.-g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0))\right|\\
&+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0)\right|\\
\le& \sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0\sup_{t\in[0,T]}\left|x^{(m)}(t-\tau_{mi}(t))\right|+\sum_{i=1}^{m-1}|a_i||x^{(i)}|_0\\
&+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0)\right|\\
\le& \sum_{i=1}^{m_m}|b_{mi}|_0|x^{(m)}|_0+\sum_{i=1}^{m-1}|a_i||x^{(i)}|_0+\sup_{t\in[0,T]}\left|g(t,x,x(t-\tau_{01}(t)),\cdots,\right.\\
&\left.x^{(m-1)}(t-\tau_{m-1m_{m-1}}(t)),0,\cdots,0)\right|,
\end{aligned}
$$

由条件 (A_3) 可知，存在常数 M_m 使得 $|x^{(m)}|_0\le M_m$。进而可得存在常数 M 满足 $|x|_m\le M$。

取 $r>M$，记 $\Omega=\{x\in X\mid |x|_0<r\}$，易知，$\Omega$ 满足引理 1 中的条件 (A)。定义

$$\langle y,x\rangle=\int_0^T y(t)x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\,(y,x)\in Y\times X,$$

$$Qy=\int_0^T y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, y\in Y.$$

若 $x\in \mathrm{Ker}L\bigcap\partial\Omega$，则 $x=r$ 或 $x=-r$，故当 $x\in \mathrm{Ker}L\bigcap\partial\Omega$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\langle QNx+Qy,x\rangle\cdot\langle QN(-x)+Qy,x\rangle\\
&=r^2\int_0^T g(t,r,0,\cdots,0)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T g(t,-r,0,\cdots,0)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由条件知存在常数 M' 使得当 $r>M'$ 时有

$$r^2\int_0^T g(t,r,0,\cdots,0)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T g(t,-r,0,\cdots,0)\mathrm{d}t<0.$$

不妨设 $r > M'$，则 Ω 满足引理 1 的条件 (B)，故方程 (2) 在 $\bar{\Omega}$ 中至少存在一个解。

定理 2 的证明类似于定理 1 的证明。

例 我们考虑下面的三阶中立型微分方程

$$\begin{aligned} x^{(3)} \ =\ & \frac{1}{100}x^{(2)} + \frac{1}{16}\sin^2 x^{(3)}\Big(t-\frac{1}{4}\sin t\Big) + \frac{1}{16}\sin^2 x^{(3)}\Big(t-\frac{1}{4}\cos t\Big) \\ & + \frac{e^{-\sin^2 t}}{32}\sin^2 x^{(2)}\Big(t-\frac{1}{4}\sin^2 t\Big) + \sin^2 t + 1. \end{aligned} \tag{4}$$

根据方程 (4) 可知

$$T = 2\pi, \quad a_2 = \frac{1}{100},$$

$$g(t,x,x_{21},x_{31},x_{32}) = \frac{1}{16}\sin^2 x_{31} + \frac{1}{16}\sin^2 x_{32} + \frac{e^{-\sin^2 t}}{32}\sin^2 x_{21} + \sin^2 t + 1,$$

$$\tau_{21}(t) = \frac{1}{4}\sin^2 t, \quad \tau_{31}(t) = \frac{1}{4}\sin t, \quad \tau_{32}(t) = \frac{1}{4}\cos t.$$

容易验证，$g(t,x,x_{21},x_{31},x_{32})$ 满足定理 1 中条件 (A_1), (A_2)，且可取

$$b_{21}(t) = \frac{e^{-\sin^2 t}}{32}, \quad b_{31}(t) = b_{32}(t) = \frac{1}{16},$$

又

$$|\tau'_{31}|_0 = |\tau'_{32}|_0 \le \frac{1}{4} < 1,$$

且

$$\begin{aligned} & (\,|a_2| + |b_{21}|_0\,)T + |b_{31}|_0\Big|\frac{1}{1-\tau'_{31}}\Big|_0 + |b_{32}|_0\Big|\frac{1}{1-\tau'_{32}}\Big|_0 \\ =\ & \Big(\frac{1}{100}+\frac{1}{32}\Big)2\pi + \frac{1}{16}\Big|\frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos t}\Big|_0 + \frac{1}{16}\Big|\frac{1}{1+\frac{1}{4}\sin t}\Big|_0 < 1, \end{aligned}$$

故根据定理 1 可知方程 (4) 至少存在一个 2π 周期解，类似的，也可验证方程 (4) 满足定理 2 的条件，因此由定理 2 也可判定方程 (4) 周期解的存在性，显然利用文 [7] 和 [8] 的结果无法得出方程 (4) 周期解存在与否的结论。

致谢：感谢审稿人提出的宝贵修改意见。

参考文献：

[1] Brayton R. Nonlinear oscillations in a distributed network[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1976, 24(4): 289-301

[2] Liu B W, Huang L H. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of second order neutral functional differential equation[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2007, 8(1): 222-229

[3] 王志斌. 一阶中立型微分方程解的振动性[J]. 工程数学学报，2005, 22(2): 261-267

[4] 迪申加卜. 具有无限时滞中立型泛函微分方程解的有界性[J]. 工程数学学报，2004, 21(4): 631-634

[5] Xu R, Meng F W. Some new oscillation criteria for second order quasi-linear neutral delay differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(1): 797-803

[6] Liu G R, Yan J R, Zhang F Q. Existence of periodic solutions for neutral functional differential equation[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66(1): 253-267

[7] 张保生，曹进德. 关于高阶多时滞中立型微分方程的周期解[J]. 生物数学学报，1999, 14(1): 50-55
[8] Liu Z d, Mao Y P. Existence theorem for positive solution of high order nonlinear differential equation[J]. Journal of Mathematics Analysis and Applications, 1997, 216(2): 481-490
[9] Petryshyn W V, Yu Z S. Existence theorems for high order nonlinear periodic boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 1982, 6(9): 943-969
[10] 鲁世平，葛渭高. 一类多偏差变元的二阶微分方程周期解问题[J]. 系统科学与数学，2005, 25(4): 216-227

Existence of Periodic Solutions for a Kind of High Order Neutral Differential Equations

ZHENG Chun-hua[1], LIU Wen-bin[2]

(1- Basic Department, Shaanxi Industry Polytechnic Institute, Xianyang 712000;
2- Department of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116)

Abstract: By utilizing specific analysis techniques and the k-set contractive operator theory, we study the existence of periodic solutions for a kind of higher order neutral functional differential equations. Two kinds of sufficient conditions which guarantee the existence of at least one periodic solution to the equation are obtained. The investigated equation in existing results is extended from the ordinary differential equation to the functional differential equation. Meanwhile, some assumptions in current results are weaken or removed. Our conclusions generalize and improve the related results in the literature from both the form of the equation and the conditions for the existence of periodic solutions.
Keywords: *neutral differential equation; high order; k-set contractive mapping; periodic solution*